

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет Прикладной математики – процессов управления

Кафедра МЭКС

Калатурская Элла Владимировна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Моделирование диодной системы с тонким
полевым эмиттером в цилиндрической
системе координат**

Направление 010900

«Прикладные математика и физика»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Виноградова Е. М..

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение	3
1 Расчет диодной системы с тремя граничными условиями в цилиндрической системе координат	5
1.1 Метод разделения переменных в цилиндрической системе координат	5
1.2 Моделирование диодной системы	10
1.2.1 Физическая модель	10
1.2.2 Математическая модель	10
1.2.3 Решение граничной задачи	11
1.2.4 Результаты численных расчетов	14
1.2.5 Результаты	16
2 Расчет диодной системы с четырьмя граничными условиями	17
2.1 Физическая модель	17
2.2 Математическая модель	17
2.3 Решение задачи	18
2.4 Результаты численных расчетов	21
2.5 Результаты	23
Выводы	23

3	Моделирование диодной системы с конечным полевым остри-	
	ем	24
3.1	Физическая модель	24
3.2	Математическая модель	25
3.3	Решение граничной задачи	25
3.4	Результаты	29
	Заключение	30

Введение

Принципом работы эмиттера является одно из фундаментальных физических явлений – испускание электронов в вакуум (автоэмиссия). Благодаря холодным катодам вакуумная электроника переросла в вакуумную микроэлектронику и сегодня развивается как эмиссионная наноэлектроника. Использование автокатодов представляется привлекательным во многих областях наноэлектронных приборов — электронно-оптических преобразователях, рентгеновских трубках, СВЧ-приборах, дисплеях и др. Более того, автоэмиссия, стимулированная корпускулярным излучением, может быть использована для визуализации этих излучений[1].

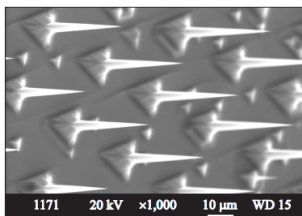


Рис. 1. Участок поверхности многоострийного полевого кремниевого эмиттера [2].

К основным преимуществам полевых эмиттеров можно отнести прежде всего их компактность, в связи с отсутствием дополнительных узлов для получения эмиссии, и экономичность, так как отсутствует расход на дополнительный нагрев и необходимы небольшие напряжения для обеспечения процесса эмиссии[3]. Кроме того, следует также отметить, что непрерывно возрастающие требования к качеству проектируемых наноэлектронных приборов приводят к необходимости учета все более сложных элементов моделируемых систем. К настоящему времени в литературе представлено достаточно много методов расчета и моделирования подобных диодных систем на основе полевых эмиттеров [4]-[7].

Целью данной работы является построение математической модели тонкого полевого острия и нахождение распределения потенциала во всей области диодной системы.

Глава 1

Расчет диодной системы в цилиндрической системе координат

1.1 Метод разделения переменных в цилиндрической системе координат

Метод разделения переменных является одним из самых наиболее удобных и распространенных методов решения уравнений в частных производных *математической физики*. Использование этого метода зачастую приводит к построению систем ортогональных функций. Как известно, уравнения, содержащие трехмерный оператор Лапласа, разделяются в одиннадцати различных системах координатах.[9]

Рассмотрим уравнение Лапласа в цилиндрических координатах для функции $U = U(z, r, \varphi)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

Пункт 1. Разделение переменных.

Требуется решить уравнение Лапласа $\Delta U(r, \varphi, z) = 0$, $0 \leq r \leq R_1$,

$-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq z_0$. Представим решение в виде:

$$U(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z). \quad (1.2)$$

При этом не рассматривается случай тривиального решения: $U(r, \varphi, z) \neq 0$.

Подставляя (1.2) в (1.1) и разделив на $U(r, z, \varphi)$, получим:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \frac{1}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{1}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial \Phi^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \frac{1}{Z(z)} = 0. \quad (1.3)$$

Рассмотрим осесимметричный случай, когда уравнение не зависит от φ .

$$\Delta U(r, z) = 0, \quad (1.4)$$

$$U(r, 0) = U(r, z_0) = 0. \quad (1.5)$$

Получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{1}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{R(r)} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{1}{Z(z)} = 0. \quad (1.6)$$

Поскольку (1.6) представляет собой равенство двух функций, зависящих от разных переменных, то знак тождества в (1.6) возможен тогда и только тогда, когда левая и правая часть будут равны постоянной величине. Рассмотрим два случая константы разделения.

Отрицательная константа разделения.

Рассмотрим случай, когда константа разделения меньше нуля. Обозначим эту величину как $-\lambda^2$:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{1}{R(r)} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{R(r)} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{1}{Z(z)} = -\lambda^2. \quad (1.7)$$

Таким образом, из уравнения (1.7) получаем, что функции $R(r)$ и $Z(z)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad R'' + \frac{1}{r} R' - \lambda^2 R = 0.$$

Первое уравнение – это обыкновенное дифференциальное уравнение, второе – это модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка. В обоих уравнениях содержится параметр λ . Для его определения, учтем, что уравнение для $Z(z)$ является однородным по z и поставлены однородные граничные условия (1.5) – поэтому задача об определении $Z(z)$ и λ может быть поставлена как задача Штурма-Лиувилля.

Пункт 2. Задача Штурма-Лиувилля.

Имеем следующую граничную задачу Штурма-Лиувилля:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad Z(0) = Z(z_0) = 0. \quad (1.8)$$

Решение (1.8) имеет вид:

$$Z(z) = C_1 \cos(\lambda z) + C_2 \sin(\lambda z). \quad (1.9)$$

Собственными значениями этой задачи являются:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{z_0} \right)^2,$$

а собственные функции имеют следующий вид:

$$Z_n(z) = \sin \left(\frac{\pi n}{z_0} z \right).$$

Пункт 3. Получение общего решения.

После того, как определены значения λ , можно находить решения уравнения для $R(r)$:

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \left(\frac{\pi n}{z_0}\right)^2 R = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид:

$$R_n(r) = A_n I_0\left(\frac{\pi n}{z_0}r\right) + B_n K_0\left(\frac{\pi n}{z_0}r\right).$$

I_0, K_0 - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Общее решение уравнения (1.4) имеет вид:

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^n \left(A_n I_0\left(\frac{\pi n}{z_0}r\right) + B_n K_0\left(\frac{\pi n}{z_0}r\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{z_0}z\right). \quad (1.10)$$

Пункт 4. Определение постоянных.

Можно заметить, что соотношение (1.10) удовлетворяет граничным условиям (1.5) и зависит от неизвестных постоянных, определяя которые получим решение удовлетворяющее начальным условиям.

Положительная константа разделения.

Аналогичные рассуждения справедливы и для второго случая:

$$\Delta U(r, z) = 0,$$

$$U(0, z) = U(R_1, z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{1}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{R(r)} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{1}{Z(z)} = -\lambda^2.$$

Получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0, \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0. \quad (1.11)$$

Первое уравнение – это обыкновенное дифференциальное уравнение, второе это уравнение Бесселя нулевого порядка.

Решение первого дифференциального уравнения (1.11) имеет вид:

$$Z(z) = C_1 \operatorname{ch}(\lambda z) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda z). \quad (1.12)$$

Решение второго дифференциального уравнения (1.11) имеет вид:

$$R(r) = B_1 J_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r). \quad (1.13)$$

J_0, Y_0 - функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Собственными значениями этой задачи являются:

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{R_1} \right)^2,$$

а собственные функции имеют следующий вид:

$$R_n(r) = J_0 \left(\frac{\gamma_n}{R_1} r \right).$$

Запишем общее решение, учитывая что коэффициенты при функциях Бесселя второго рода равны нулю, в силу ограниченности распределения потенциала.

Общее решение:

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^n \left(D_n \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma_n}{R_1} z \right) + C_n \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma_n}{R_1} z \right) \right) J_0 \left(\frac{\gamma_n}{R_1} r \right),$$

где γ_n – это нули $J_0(r)$.

1.2 Моделирование диодной системы

1.2.1 Физическая модель

В качестве физической модели рассматривается цилиндрическая ячейка. На торцах цилиндра и боковой поверхности заданы граничные условия первого рода. Схематическое изображение диодной системы представлено на рисунке (1.1).

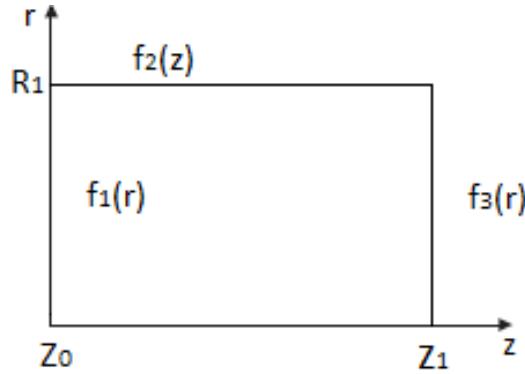


Рис. 1.1. Диодная система.

1.2.2 Математическая модель

В качестве математической модели, описывающей данную систему, рассматривается функция распределения электростатического потенциала $U(r, z)$ удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\Delta U(r, z) = 0, \quad (1.14)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} U(r, z_0) = f_1(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ U(r, z_1) = f_3(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ U(R_1, z) = f_2(z), & 0 \leq z \leq Z_1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми коор-

динатами определяется формулами:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi), \\y &= r \sin(\varphi), \\z &= z,\end{aligned}\tag{1.16}$$

где $-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 \leq r \leq R_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$.

1.2.3 Решение граничной задачи

Используя метод разделения переменных, описанный в предыдущем параграфе (1.1), можно сразу выписать в общем виде решение граничной задачи (1.14)-(1.15), представляя решение уравнения Лапласа в виде суммы двух функций и учитывая что коэффициенты при функциях Бесселя второго рода равны нулю, в силу ограниченности распределения потенциала.

$$U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z).$$

Граничные условия (1.15) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}U_1(r, z_0) &= f_1(r), & U_2(r, z_0) &= 0, \\U_1(r, z_1) &= f_3(r), & U_2(r, z_1) &= 0, \\U_1(R_1, z) &= 0, & U_2(R_1, z) &= f_2(z).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Функция $U_1(r, z)$:

$$U_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_{1,n} \operatorname{sh}(\mu_{0,n} z) + B_{2,n} \operatorname{ch}(\mu_{0,n} z)) J_0(\mu_{0,n} r).\tag{1.18}$$

Функция $U_2(r, z)$:

$$U_2(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_{1,m} \sin(\xi_m z) + A_{2,m} \cos(\xi_m z)) I_0(\xi_m r), \quad (1.19)$$

где собственные значения ξ_m и $\mu_{0,n}$ определяются из граничных условий (1.17):

$$\xi_m = \frac{\pi m}{z_1 - z_0}, \quad \mu_{0,n} = \frac{\gamma_{0,n}}{R_1}.$$

где $\gamma_{0,n}$ — нули функции Бесселя $J_0(\gamma_{0,n})$.

Для определения постоянных $B_{1,n}$, $B_{2,n}$ и $A_{1,m}$, $A_{2,m}$, входящих в разложения (1.18) и (1.19), воспользуемся граничными условиями (1.17).

Подставим в (1.19) граничные условия $U_2(r, z_0) = 0$ и $U_2(r, z_1) = 0$ и установим связь между константами $A_{1,m}$ и $A_{2,m}$:

$$A_{1,m} \cos(\xi_m z_0) + A_{2,m} \sin(\xi_m z_0) = 0. \quad (1.20)$$

Перепишем общее решение (1.19) подставив в него (1.20) и после некоторых преобразований получим следующее:

$$U_2(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2,m} \sin(\xi_m(z - z_1)) I_0(\xi_m r). \quad (1.21)$$

Разложим $f_2(z)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\sin(\xi_m(z - z_1))$, получим:

$$f_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \sin(\xi_m(z - z_1)), \quad (1.22)$$

где $p_m = \frac{2}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} f_2(z) \sin(\xi_m(z - z_1)) dz$.

Далее определим постоянные $A_{2,m}$ — вычислим (1.21) при $r = R_1$, получим:

$$U_2(R_1, z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2,m} \sin(\xi_m(z - z_1)) I_0(\xi_m R_1), \quad (1.23)$$

приравнивая (1.23) и (1.22), получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{2,m} \sin(\xi_m(z - z_1)) I_0(\xi_m R_1) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \sin(\xi_m(z - z_1)),$$

следовательно:

$$A_{2,m} = \frac{p_m}{I_0(\xi_m R_1)}.$$

Далее определим $B_{1,n}$ и $B_{2,n}$. Для этого разложим $f_1(r)$ и $f_3(r)$ в ряды Фурье по функциям Бесселя $J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r)$, получим:

$$f_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r), \quad (1.24)$$

$$d_n = \frac{2}{J_0^2(\gamma_{1,n}) R_1^2} \int_0^{R_1} f_1(r) r J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r) dr. \quad (1.25)$$

$$f_3(r) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r), \quad (1.26)$$

$$l_n = \frac{2}{J_0^2(\gamma_{1,0,n}) R_1^2} \int_0^{R_1} f_3(r) r J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r) dr. \quad (1.27)$$

Вычислим (1.18) при $z = z_0$ и при $z = z_1$:

$$U_1(r, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{1,n} \operatorname{sh}(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_0) + B_{2,n} \operatorname{ch}(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_0) \right) J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r), \quad (1.28)$$

$$U_1(r, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{1,n} \operatorname{sh}(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_1) + B_{2,n} \operatorname{ch}(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_1) \right) J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r). \quad (1.29)$$

Приравнивая (1.28) и (1.24), (1.29) и (1.26), получим СЛАУ относительно $J_0(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{1,n} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_0\right) + B_{2,n} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_0\right) \right) J_0\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n J_0\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{1,n} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_1\right) + B_{2,n} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_1\right) \right) J_0\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r\right) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n J_0\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r\right).$$

Пользуясь методом Крамера, определяем $B_{1,n}$ и $B_{2,n}$:

$$B_{1,n} = \frac{l_n \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_0\right) - d_n \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_1\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} (z_1 - z_0)\right)},$$

$$B_{2,n} = \frac{d_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_1\right) - l_n \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} z_0\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} (z_1 - z_0)\right)}.$$

Итак, пользуясь общим методом разделения переменных и определив значения постоянных $B_{1,n}$, $B_{2,n}$ и $A_{2,m}$ можно выписать общее решение краевой задачи (1.14)-(1.15) в виде следующих рядов:

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[d_n \frac{\operatorname{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z))}{\operatorname{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} + l_n \frac{\operatorname{sh}(\mu_{0,n}(z - z_0))}{\operatorname{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} \right] J_0(\mu_{0,n} r) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} p_m \frac{I_0(\xi_m r)}{I_0(\xi_m R_1)} \sin(\xi_m (z - z_0)), \quad (1.30)$$

где коэффициенты p_m , d_n , l_n определяются формулами (1.22), (1.25), (1.27).

1.2.4 Результаты численных расчетов

Решения задачи (2.1) – (2.2) было получено численно .

И на основе формулы, определяющей связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля

$$E = -\operatorname{grad} U$$

была рассчитана напряженность поля $E(r, z)$. Область значений z и r , в

которой производился расчет: $z \in [z_1, z_2]$, $r \in [0, R_1]$. Используемые параметры: $u_0 = 100$ — постоянное напряжение,

$$z_1 = 0, z_2 = 1, R_1 = 1,$$

$$f_1(r) = 0,$$

$$f_2(z) = u_0 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

$$f_3(r) = u_0.$$

Входные параметры:

n — количество разбиений отрезков $z \in [z_1, z_2]$, $r \in [0, R_1]$;

N, M — количество членов ряда в первой сумме $U_1(r, z)$ и во второй $U_2(r, z)$.

При расчете потенциала было взято ($n = 100$, $N = 100$, $M = 100$),
при расчете напряженности ($n = 50$, $N = 100$, $M = 100$).

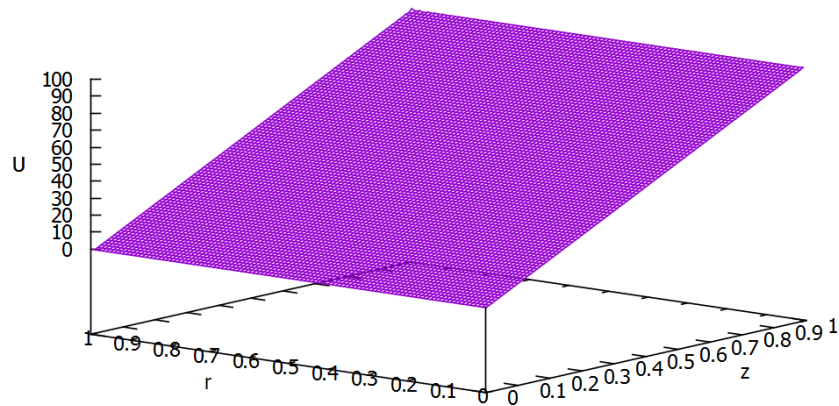


Рис. 1.2. $U(r, z)$.

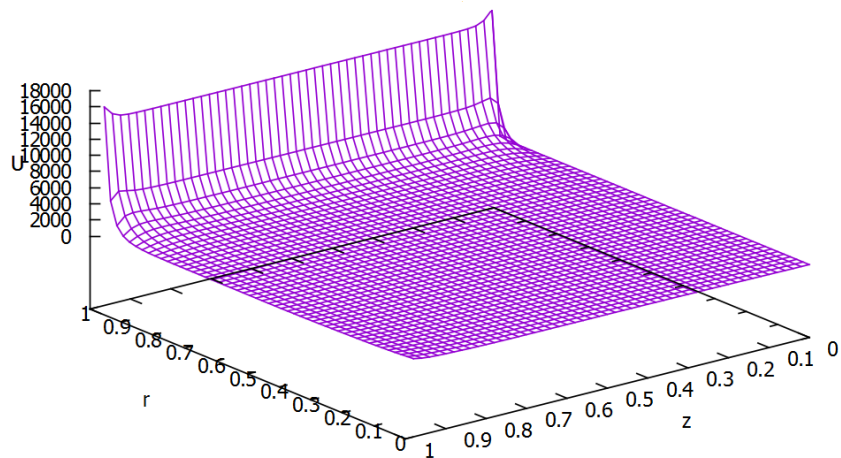


Рис. 1.3. $E(r, z)$.

1.2.5 Результаты

Таким образом, построена модель диодной системы рис.(1.1) и найдено решение краевой задачи (1.14) – (1.15) в аналитическом виде (1.30). В соответствии с найденным решением, построены графики распределения электрического потенциала и напряженности поля рисунки (1.2) и (1.3), которые совпадают с качественно ожидаемым распределением потенциала и напряженности.

Глава 2

Расчет диодной системы с четырьмя граничными условиями

2.1 Физическая модель

В качестве физической модели рассматривается подобная предыдущему случаю осесимметричная диодная система.

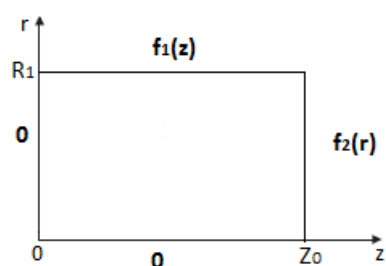


Рис. 2.1. Диодная система.

2.2 Математическая модель

В качестве математической модели рассматривается уравнение Лапласа со следующими граничными условиями:

$$\Delta U(r, z) = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} U(r, 0) = f_3(r) = 0, & 0 \leq r \leq R_1, \\ U(R_1, z) = f_1(z), & 0 \leq z \leq z_0, \\ U(r, z_0) = f_2(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ U(0, z) = f_4(z) = 0, & 0 \leq z \leq z_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.3 Решение задачи

Для решения граничной задачи (2.1)–(2.2) будем использовать метод разделения переменных. Применив тот же подход, который был рассмотрен ранее, получим следующее.

Распределение потенциала $U(r, z)$ представимо в виде:

$$U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z). \quad (2.3)$$

Граничные условия (2.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} U_1(r, 0) &= 0, & U_2(r, 0) &= 0, \\ U_1(r, z_0) &= f_2(r), & U_2(r, z_0) &= 0, \\ U_1(R_1, z) &= 0, & U_2(R_1, z) &= f_1(z), \\ U_1(0, z) &= 0, & U_2(0, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функция $U_1(r, z)$:

$$U_1(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (B_{1,m} \operatorname{sh}(\mu_{1,m} z) + B_{2,m} \operatorname{ch}(\mu_{1,m} z)) J_1(\mu_{1,m} r). \quad (2.5)$$

Функция $U_2(r, z)$:

$$U_2(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{1,n} \sin(\nu_n z) + A_{2,n} \cos(\nu_n z)) I_1(\nu_n r), \quad (2.6)$$

где собственные значения ν_n и μ_m определяются из граничных условий $U_2(r, z_0) = 0$, $U_1(R_1, z) = 0$:

$$\nu_n = \frac{\pi n}{z_0}, \quad \mu_{1,m} = \frac{\gamma_{1,m}}{R_1}.$$

Соотношения (2.5) – (2.6) удовлетворяют граничным условиям (2.4) и зависят от неизвестных постоянных, определяя которые получим итоговое общее решение. Для определения постоянных $B_{2,m}$ и $A_{2,n}$ воспользуемся граничными условиями (2.4).

Подставим в (2.6) нулевые граничные условия $U_2(r, 0) = 0$, а в (2.5) нулевые граничные условия $U_1(0, z) = 0$. Откуда получаем, что $A_{2,n} = 0$ и $B_{2,m} = 0$:

А для определения оставшихся коэффициентов $B_{1,m}$ и $A_{1,n}$ воспользуемся свойством ортогональности функций Бесселя и синусов.

Свойство ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^{R_1} r J_1(\mu_{1,m} r) J_1(\mu_{1,k} r) dr = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{R_1^2}{2} J_0^2(\mu_{1,m}), & k = m. \end{cases}$$

Свойство ортогональности синусов:

$$\int_0^{z_0} \sin(mz) \sin(kz) dz = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{z_0}{2}, & k = m. \end{cases}$$

Разложим функции $f_1(z)$ и $f_2(r)$, задающие граничные условия, в ряды Фурье по собственным функциям $\sin(\nu_n z)$ и $J_1(\mu_{0,k} r)$:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\nu_n z), \quad (2.7)$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{z_0} \int_0^{R_1} f_2(z) \sin(\nu_n z) dz.$$

$$f_2(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_1(\mu_{1,m} r), \quad (2.8)$$

$$\text{где } b_m = \frac{2}{J_0^2(\mu_{1,m}) R_1^2} \int_0^{R_1} f_2(z) J_1(\mu_{1,m} r) dr.$$

Далее определим постоянные $A_{1,n}$ – вычислим (2.6) при $r = R_1$, получим:

$$U_2(R_1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n} \sin(\nu_n z) I_1(\nu_n R_1), \quad (2.9)$$

приравнявая (2.9) и (2.7) получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n} \sin(\nu_n z) I_1(\nu_n R_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\nu_n z)$$

следовательно:

$$A_{1,n} = \frac{a_n}{I_1(\nu_n R_1)}.$$

Далее определим постоянные $B_{1,m}$ – вычислим (2.5) при $z = z_0$, получим:

$$U_1(r, z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{1,m} \operatorname{sh}(\mu_{1,m} z_0) J_1(\mu_{1,m} r), \quad (2.10)$$

приравнявая (2.10) и (2.8) получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{1,m} \operatorname{sh}(\mu_{1,m} z_0) J_1(\mu_{1,m} r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_1(\mu_{1,m} r),$$

следовательно:

$$B_{1,m} = \frac{b_m}{\operatorname{sh}(\mu_{1,m} z_0)}.$$

Таким образом, определив постоянные, получим решение в виде ряда

(2.11):

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\nu_n z) \frac{I_1(\nu_n r)}{I_1(\nu_n R_1)} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{\text{sh}(\mu_{1,m} z)}{\text{sh}(\mu_{1,m} z_0)} J_1(\mu_{1,m} r), \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{z_0} \int_0^{z_0} f_1(z) \sin(\nu_n z) dz, & \nu_n &= \frac{\pi n}{z_0}, \\ b_m &= \frac{2}{J_0^2(\mu_{1,m}) R_1^2} \int_0^{R_1} f_2(r) r J_1(\mu_{1,m} r) dr, & \mu_{1,m} &= \frac{\gamma_{1,m}}{R_1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$I_1(r)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, первого порядка.
 $J_1(r)$ – функция Бесселя первого рода, первого порядка, $\gamma_{1,m}$ – нули $J_1(r)$.

2.4 Результаты численных расчетов

Решение задачи (2.1) – (2.2) было получено численно. И на основе формулы, определяющей связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{E} = -grad U$$

была рассчитана напряженность поля $E(r, z)$.

Область значений z и r , в которой производился расчет: $z \in [0, z_0]$,
 $r \in [0, R_1]$.

Используемые параметры:

$u_0 = 100$ – постоянное напряжение,

$z_0 = 1, R_1 = 1$,

$f_1(z) = u_0 \frac{z}{z_0}$.

$f_2(r) = u_0 \frac{r}{R_1}$.

Входные параметры:

n – количество разбиений отрезков $z \in [0, z_0], r \in [0, R_1]$;

N, M – количество членов ряда в первой сумме $U_1(r, z)$ и во второй $U_2(r, z)$.

При расчете потенциала было взято ($n = 100, N = 100, M = 100$), при

расчете напряженности ($n = 50$, $N = 100$, $M = 100$).

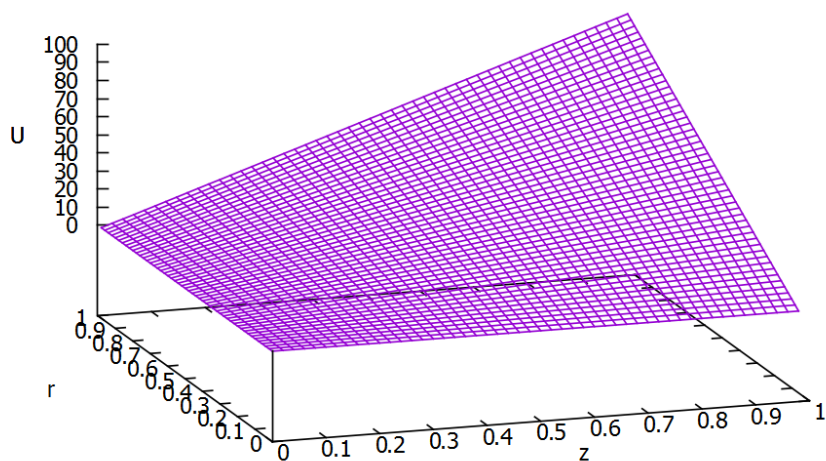


Рис. 2.2. $U(r, z)$..

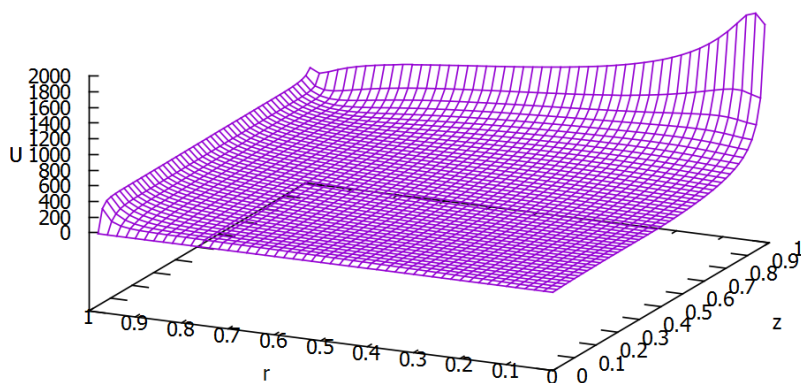


Рис. 2.3. $E(r, z)$..

2.5 Результаты

Таким образом, в ходе проделанной работы найдено распределение электрического потенциала (2.11),(2.12) в виде разложения по функциям Бесселя и тригонометрическим функциям для модели диодной системы (2.1) с граничными условиями (2.2). В соответствии с найденным решением, построены графики распределения электрического потенциала и напряженности поля рисунки (2.2) и (2.3), которые совпадают с качественно ожидаемым распределением потенциала и напряженности.

Глава 3

Моделирование диодной системы с конечным полевым острием

3.1 Физическая модель

В качестве физической модели рассматривается осесимметричная диодная система с тонким полевым острием. Схематичное изображение этой системы представлено на рисунке (3.1).

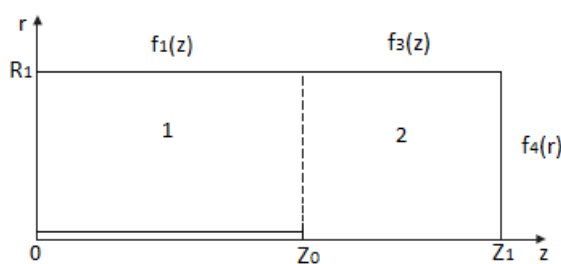


Рис. 3.1. Диодная система.

3.2 Математическая модель

В качестве математической модели, описывающей данную систему, рассматривается уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1)$$

С граничными условиями вида:

$$\begin{cases} U(r, 0) = 0, & 0 \leq r \leq R_1, \\ U(0, z) = 0, & 0 \leq z \leq Z_0, \\ U(R_1, z) = f_1(z), & 0 \leq z \leq Z_0, \\ U(R_1, z) = f_3(z), & Z_0 \leq z \leq Z_1, \\ U(r, z_1) = f_4(r), & 0 \leq r \leq R_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.3 Решение граничной задачи

Для решения граничной задачи (3.1) – (3.2) разобьем всю область диодной системы на две подобласти: **1.** $0 \leq r \leq R_1$, $0 \leq z \leq z_0$, и **2.** $0 \leq r \leq R_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$. Тогда решение можно представить в виде суммы двух функций $U_1(r, z), U_2(r, z)$:

$$U(r, z) = U_1(r, z) + U_2(r, z).$$

Так как подробное изложение решения данной граничной задачи было показано в главе 1 и 2, можно сразу выписать общее решение для каждой из областей.

Решение для области **1**:

$$U_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\nu_n z) \frac{I_1(\nu_n r)}{I_1(\nu_n R_1)} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{\text{sh}(\mu_{1,m} z)}{\text{sh}(\mu_{1,m} z_0)} J_1(\mu_{1,m} r). \quad (3.3)$$

Решение для области **2**:

$$U_2(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[d_n \frac{\text{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z))}{\text{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} + l_n \frac{\text{sh}(\mu_{0,n}(z - z_0))}{\text{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} \right] J_0(\mu_{0,n}r) + \sum_{m=0}^{\infty} p_m \frac{I_0(\xi_m r)}{I_0(\xi_m R_1)} \sin(\xi_m(z - z_0)), \quad (3.4)$$

$J_i(\mu_{i,n}r)$ –функции Бесселя первого рода, $\mu_{i,n} = \frac{\gamma_i}{R_1}$, γ_i –нули функций Бесселя: $J_i(\gamma_i) = 0, (i = 0, 1)$.

$I_1(\nu_m r), I_0(\xi_m r)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода, $\nu_m = \frac{\pi_m}{Z_0}, \xi = \frac{\pi m}{Z_1 - Z_0}$.

Где известные коэффициенты a_n, l_m , и p_n , входящие в разложения (3.3) и (3.4) вычисляются из условий (3.2):

$$a_n = \frac{2}{z_0} \int_0^{z_0} f_1(z) \sin(\nu_n z) dz, \quad (3.5)$$

$$p_m = \frac{2}{z_1 - z_0} \int_{z_0}^{z_1} f_3(z) \sin(\xi_m(z - z_0)) dz, \quad (3.6)$$

$$l_n = \frac{2}{J_1^2(\gamma_{0,n}) R_1^2} \int_0^{R_1} f_4(r) r J_0\left(\frac{\gamma_{0,n}}{R_1} r\right) dr. \quad (3.7)$$

Для определения неизвестных коэффициентов b_m и d_n воспользуемся условиями на границе раздела двух областей. Первое условие - это условие непрерывности самого потенциала, второе условие- это непрерывность нормальной составляющей напряженности поля:

$$U_1(r, z_0) = U_2(r, z_0), \quad \frac{\partial U_1(r, z_0)}{\partial z} = \frac{\partial U_2(r, z_0)}{\partial z}, \quad (3.8)$$

Сначала рассмотрим первое – условие непрерывности самого потенциала. При подстановке получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m J_1(\mu_{1,m} r) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n J_0(\mu_{0,n} r). \quad (3.9)$$

Домножим полученное выражение (3.9) на $\int_0^{R_1} r J(\mu_{0,k} r) dr$, воспользовавшись свойством ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^{R_1} r J_0(\mu_{0,m}) J_0(\mu_{0,k}) dr = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{R_1^2}{2} J_1^2(\mu_m), & k = m. \end{cases}$$

$$\int_0^{R_1} r J_1(\mu_{0,m}) J_1(\mu_{0,k}) dr = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{R_1^2}{2} J_0^2(\mu_m), & k = m. \end{cases}$$

Получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_1} b_m r J_1(\mu_{1,m} r) J_0(\mu_{0,m} r) dr = d_n \frac{R_1^2}{2} J_1^2(\mu_{0,n} r). \quad (3.10)$$

Используя второе условие из (3.8) приходим к выражению:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \nu_n (-1)^n \frac{I_1(\nu_n r)}{I_1(\nu_n R_1)} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{\text{ch}(\mu_{1,m} z_0)}{\text{sh}(\mu_{1,m} z_0)} I_1(\mu_{1,m} z_0) \mu_{1,m} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} J_0(\mu_{0,n} r) \text{cth}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0)) l_n \mu_{0,n} - d_n \sum_{n=0}^{\infty} J_0(\mu_{0,n} r) \times \\ & \times \text{cth}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0)) + \sum_{m=0}^{\infty} p_m \xi_m \frac{I_0(\xi_m r)}{I_0(\xi_m R_1)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Затем, производя умножение формулы (3.11) на $r J_0(\mu_{0,k} r)$ и интегрируя по аргументу r в пределах $r \in [0, R_1]$ получаем следующее суммы ин-

тегралов:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_1} a_n \nu_n (-1)^n r \frac{I_1(\nu_n r)}{I_1(\nu_n R_1)} J_0(\mu_{0,k} r) dr + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_1} b_m \frac{\text{ch}(\mu_{1,m} z_0)}{\text{sh}(\mu_{1,n} z_0)} \times \\
& \times \mu_{1,n} r J_1(\mu_{1,m} z_0) J_0(\mu_{0,k} r) dr = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_1} l_n \frac{J_0(\mu_{0,n} r)}{\text{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} r \mu_{0,n} \times \\
& \times J_0(\mu_{0,k} r) dr - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_1} d_n r J_0(\mu_{0,n} r) \text{cth}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0)) J_0(\mu_{0,k} r) dr + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_1} p_m \frac{I_0(\xi_m r)}{I_0(\xi_m R_1)} \xi_m r J_0(\mu_{0,k} r) dr.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Используя свойства для модифицированных функций Бесселя преобразуем (3.12):

$$I_0(r) = J_0(ir), \quad I_1(r) = -iJ_1(ir).$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_1} a_n (-i) J_1(\nu_n ir) \nu_n (-1)^n r \frac{I_1(\nu_n r)}{I_1(i\nu_n R_1)} J_0(\mu_{0,k} r) dr + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_1} b_m \times \\
& \times \text{cth}(\mu_{1,m} z_0) r J_1(\mu_{1,k} z_0) \mu_{1,m} J_0(\mu_{0,k} r) dr = l_n \frac{\mu_{0,n} R_1^2 J_1^2(\mu_{0,n})}{2 \text{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} - \\
& - d_n \frac{R_1^2}{2} J_1^2(\mu_{0,n}) \text{cth}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0)) + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{R_1} p_m r \frac{J_0(i\xi_m r)}{I_0(\xi_m R_1)} \times \\
& \times \xi_m J_0(\mu_{0,m} r) dr.
\end{aligned}$$

Отдельно выпишем вычисление интеграла:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{R_1} r J_0(i\xi_n r) J_0(\mu_{0,k} r) dr = \\
& = \frac{1}{\xi_n^2 + \mu_{0,m}^2} \xi_n (I_1(\xi_n R_1) J_0(\mu_{0,n} R_1) + \mu_{0,k} I_0(\xi_0 R_1) J_1(\mu_{0,k} R_1)).
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных наборов коэффициентов b_m, d_n :

$$\begin{aligned}
d_n \frac{R_1^2}{2} J_1^2(\mu_{0,n}) - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \times F &= 0. \\
d_n \mu_{0,n} \frac{R_1^2}{2} J_1^2(\mu_{0,n}) \operatorname{cth}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0)) - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \operatorname{cth}(\mu_{1,m}r) \mu_{1,m} \times F &= \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{R_1} a_n \frac{\nu_n (-1)^n I_1(\xi_n r) J_0(\mu_{0,n}r) dr}{I_1(\xi_n R_1)} + l_n \frac{\mu_{0,n} R_1^2 J_1^2(\mu_{0,n})}{2 \operatorname{sh}(\mu_{0,n}(z_1 - z_0))} + \\
+ \sum_{n=0}^{\infty} p_m \frac{\xi}{I_0(\xi_m R_1)} \frac{1}{\xi_m^2 + \mu_{0,m}^2} \times M,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$M = (\xi_n I_1(\xi_n) R_1 J_0(\mu_{0,n} R_1) + \mu_{0,m} I_0(\xi_n R_1) J_1(\mu_{0,m})),$$

$$F = \int_0^{R_1} r J_1(\mu_{1,n}r) J_0(\mu_{0,m}r) dr.$$

3.4 Результаты

В данной главе построена математическая модель тонкого острия на плоской подложке. Для решения поставленной задачи использовался метод разделения переменных в цилиндрических координатах. Найдено распределение электрического потенциала в аналитическом виде (3.3) – (3.4), а коэффициенты, входящие в эти разложения, определяются формулами (3.5), (3.6)(3.7) и (3.13).

Заключение

1. Создана модель диодной системы рис. (1.1) и определено решение краевой задачи (1.14) – (1.15) в аналитическом виде.
2. Получено распределение электрического потенциала для модели диодной системы (2.1) с граничными условиями (2.2).
3. Построена физическая и математическая модели тонкого острия на плоской подложке. Найдено распределение электрического потенциала в аналитическом виде (3.3) – (3.4).

В ходе решения всех поставленных граничных задач был использован метод разделения переменных для уравнения Лапласа. Полученные численные значения соответствуют граничным условиям и совпадают с ожидаемым распределением потенциала.

Литература

- [1] Жуков Н. Д., Мосияш Д. С., Хазанов А. А., Абаньшин Н. П. Оптимизация структуры и материала автокатода // Прикладная физика. 2015. №3. С. 93.
- [2] Соминский Г. Г., Тумарева Т. А., Тарадаев Е. П., Мишин М. В., Степанова А. Н. Многоострийные полупроводниковые полевые эмиттеры с двухслойными защитными покрытиями нового типа // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 1. С. 138–141. Жуков Н. Д., Мосияш Д. С., Хазанов А. А., Абаньшин Н. П. Оптимизация структуры и материала автокатода // Прикладная физика. 2015. №3. С. 93.
- [3] Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 1–5.
- [4] Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Мутул М. Г., Чэ-Чоу Шень. Расчёт электростатического потенциала диодной системы на основе полевого катода с острой кромкой // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 5. С. 1–4.
- [5] Климаков А. А., Виноградова Е. М. Оптимизация фокусирующей системы полевой пушки с острийным катодом // Процессы управления и устойчивость. 2015. № 1. С. 184–189.
- [6] Телевный Д. С., Виноградова Е. М. Расчёт диодной системы на основе полевого эмиттера с диэлектрической подложкой // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). С. 224–229.

- [7] Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Климаков А. А. Математическое моделирование диодной системы с полевым остриём цилиндрической формы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 2. С. 20–23.
- [8] М. Абрамовиц "Справочник по специальным функциям" М., 1997 – 832 с.
- [9] Н.С.Кошляков, Э.Б. Глинер М.М. Смирнов. "Уравнения в частных производных математической физики" Учебное пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. исп. –М.: Изд-во "Высшая школа 1970 г. – 713 с.
- [10] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский "Уравнения математической физики". Учебное пособие для университетов. 4 изд., исп. –М.: Изд-во "Наука 1972 г. –736 с.
- [11] Градштейн И.С., Рыжик И. М. "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений 4 изд., исп. –М.:Физмат. , 1963г. –1100 с.
- [12] Г. Н. Ватсон, "Теория бесселевых функций". Ч. 1, изд-во иностр. л., 1949. – 799с.